BASE E DIMENSÃO

Passemos agora à tarefa de atribuir uma dimensão a certos espaços vetoriais. Apesar de associarmos usualmente dimensão a algo geométrico, precisamos encontrar uma definição algébrica adequada da dimensão de um espaço vetorial. Isto será feito através do conceito de base.

Definição 12. Seja V um espaço vetorial real. Uma base de V é um conjunto linearmente independente de V e que gera V.

Exemplos:

1. $\beta = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ é LI e gera $\mathbb{R}^3$. Logo é uma base para o $\mathbb{R}^3$.

2. $\beta = \{(1,1);(-1,1)\}$ é LI e gera $\mathbb{R}^2$. Logo é uma base para $\mathbb{R}^2$.

Teorema 9: Seja V um espaço vetorial real, finitamente gerado pelos elementos do conjunto $S = \{v_1, \dots, v_n\}$. Então podemos extrair do conjunto S uma base para V.

Demonstração: Se S for um conjunto LI, então S é uma base de V. Agora, se S for um conjunto LD então do Teorema 6, um de seus elementos é combinação linear dos outros, digamos que seja $v_n \in S$.

Ou seja, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ escalares tais que

$$v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}.$$

Ou seja $v_n \in [v_1, \dots, v_{n-1}]$. Do <u>exercício 11</u> da Lista 3 $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é gerador de V. Se $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ for LD, repetimos esse processo até chegarmos a um conjunto LI, que ainda gera V. Com isso obtemos uma base para V.

<u>Teorema 10</u>: Seja V um espaço vetorial real gerado por um conjunto finito de elementos $v_1, \dots, v_n \in V$. Então, todo conjunto linearmente independente de V é finito e contém no máximo n elementos.

<u>Demonstração</u>: Como não foi trabalhado a teoria de sistemas lineares no curso, e p/ demonstrar esse teorema se faz necessário tal teoria, deixarei a demonstração. (a ~~título de conhecimento dos alunos~~)

<u>Definição 13</u>: Seja V um espaço vetorial real. Dizemos que V é um espaço vetorial de dimensão finita se V possui uma base finita.

Corolário 2: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Então, quaisquer duas bases de V têm o mesmo número de elementos

Demonstração: Suponha que $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \dots w_m\}$ são **bases finitas** para V. Como β gera V e β' é LI em V, do Teorema 10 temos que $m \leq n$. Analogamente, $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ gera V e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é LI em V, pelo Teorema 10 $n \leq m$. Portanto $m = n$.

Exemplo

$\beta = \{(1,0); (1,1)\}$ e $\beta' = \{(1,1), (1,-1)\}$ são duas bases para $\mathbb{R}^2$.

Definição 14: Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita, que possui uma base com n elementos. A dimensão de V é definida como sendo o número de elementos de uma base de V. Indicaremos a dimensão de V por $\dim(V) = n$.

Observação:

No caso em que $V = \{0_V\}$, temos que o conjunto vazio $\emptyset \subset V$ é base de V e dizemos que o espaço vetorial V tem dimensão nula.

Exemplos:

1) $P_3(\mathbb{R})$, $\beta = \{1, x, x^3\}$ é uma base de $P_3(\mathbb{R})$, denominada base canônica. Assim $\dim(P_3(\mathbb{R})) = 3$. ...

2) $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base para $M_2(\mathbb{R})$, logo $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$.

Corolário 4: Seja V um espaço vetorial real, de $\dim V = n$.

a) Todo subconjunto de V com mais de n elementos é LD.

b) Nenhum conjunto contendo menos de n elementos pode gerar V.

Dem: Exercício para casa

Teorema 11 (Completamento): Seja S um subconjunto linearmente independente de V, onde V é um e.v. de dimensão finita. Então S pode ser completado de modo a formar uma base para V.

32

Demonstração: Considere $\dim(V) = n$ e $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ linearmente independente. O Teorema 10 nos diz que $k \leq n$. Se $[v_1, \dots, v_k] = V$, então S é base de V. Agora se existe $v_{k+1} \in V$ tal que $v_{k+1} \notin [v_1, \dots, v_k]$, o exercício 10 da lista 3 nos diz que $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ é LI. Se $V = [v_1, \dots, v_{k+1}]$ então $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ é base de V. Caso contrário, repete o procedimento até chegarmos a uma base de V.

Exemplos:

(1) $S = \{(1,0)\}$ é LI em $\mathbb{R}^2$;

Sei que $\mathbb{R}^2$ é um e.v. ~~(com)~~ de dim finita;

Aplicando Teo 11, podemos completar S até chegar a uma base do $\mathbb{R}^2$.

Procedimento:

(2) $S = \{(3,1,0)\}$ é LI em $\mathbb{R}^3$

Completar S até chegar a uma base do $\mathbb{R}^3$!

(3) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ é LI em $M_2(\mathbb{R})$.

Completar S até chegar a uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

(*) Ensinar a representar um vetor qualquer de um e.v. de dim. finita, com base β, em coordenadas. Fazer apenas exemplos.

<u>Teorema 12</u>: Seja U um subespaço vetorial de um e.v. V de dimensão finita. Então todo subconjunto de U LI, é finito e é parte de uma base de U.

<u>Dem</u>: Exercício para casa.

<u>Corolário 5</u>: Seja U um subespaço vetorial próprio de um $V \equiv$ e.v. de dimensão finita. Então U é de dimensão finita e $\dim(U) < \dim(V)$.

<u>Dem</u>: Exercício para casa.

AULA DO DIA 12/09/2016

Teorema 13: Sejam U e W subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial real V. Então $U+V$ é de dimensão finita e tem-se que:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Demonstração: Como U, W são subespaços de V, então sabemos que $U \cap W$ é subespaço de V. Note que $U \cap W \subset U$ e $U \cap W \subset W$. Do corolário 5 $U \cap W$ é de dimensão finita e, $\dim(U \cap W) < \dim(U)$ e $\dim(U \cap W) < \dim(W)$.

Ou seja $U \cap W$ possui base finita $\{v_1, \dots, v_k\}$ que é parte de uma base

$$\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m\} \text{ de } U$$

e

$$\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n\} \text{ de } W.$$

Então $U + W = [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n]$

Afirmamos que $S = \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\}$ é base de $U+W$.

Para isso, basta mostrar que S é LI.

Considere a comb. linear nula:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j u_j + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l w_l = 0_V \qquad (*)$$

Então

$$-\sum_{l=1}^{n} \lambda_l w_l = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i}_{\in U \cap W \subset U} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \beta_j u_j}_{\in U} \in U$$

Defina $\hat{u} := \sum_{l=1}^{n} \lambda_l w_l$, então $\hat{u} \in U$. Como $\hat{u} \in W$,

então $\hat{u} \in U \cap W = [v_1, \dots, v_k]$. Então $\exists\, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_k \in \mathbb{R}$

tais que $\hat{u} = \sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_i v_i$. Logo:

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_i v_i = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l w_l \implies$$

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_i v_i - \sum_{l=1}^{n} \lambda_l w_l = 0_V$$

Como $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n\}$ é LI, então $\hat{\alpha}_i = 0 \ \forall\, i = 1, \dots, k$

e $\lambda_l = 0 \ \forall\, l = 1, \dots, n$. Assim substituindo $\lambda_l = 0$

na equação $(*)$, temos

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j u_j = 0_V$$

Como $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m\}$ é LI, então $\alpha_i = 0$ $\forall i = 1, \dots, k$ e $\beta_j = 0$ $\forall j = 1, \dots, m$. Portanto S é LI. E logo base de $U + W$.

Note que
$$\begin{cases} \dim U+W = k+m+n. \\ \dim U = k+m \\ \dim W = k+n \\ \dim U \cap W = k. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} \dim U+W &= k+m+n \\ &= (k+m) + (k+m) - k \\ &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W). \end{aligned}$$

<u>Proposição 2</u>: Sejam V um e.v. dimensão finita e W um subespaço de V. Então existe um subespaço U de V tal que $V = U \oplus W$.

<u>Demonstração</u>: Exercício para casa.

Proposição 3: Sejam V um e.v. real de dimensão finita e W subespaço de V. Se $\dim(W) = \dim(V)$ então $W = V$.

Demonstração: Exercício para casa.

Exemplo: V = espaço vetorial real

$$\dim(V) = 9$$

U, W subespaços de V com $\dim(U) = 6$, $\dim(W) = 5$

É verdade que $2 \leq \dim(U \cap W) \leq 5$?

Sol: $6 \leq \dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

$$= 6 + 5 - \dim(U \cap W) \leq 9$$

$$\Downarrow$$

$$5 \geq \dim(U \cap W) \geq 2$$

Exemplos

① $S = \{(1,0,-1) , (1,2,1) ; (0,-3,2)\}$

S é base para $\mathbb{R}^3$?

② $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base p/ $M_2(\mathbb{R})$!

(3) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_3 + x_5 = 0$ e $x_2 = x_4\}$

Determinar uma base p/ W!

(4) $S = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) = 0$ e $p'(1) = 0\}$

Determinar uma base para S!

(5) $S = \{1 - 2x^2 + x^3;\ 3 - x + 4x^2,\ -2 + 3x,\ x - 3x^3\}$

É base de $P_3(\mathbb{R})$?

(6) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 0\}$

Determinar uma base para U + W.

* Aqui encerra o conteúdo da 3ª lista.

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

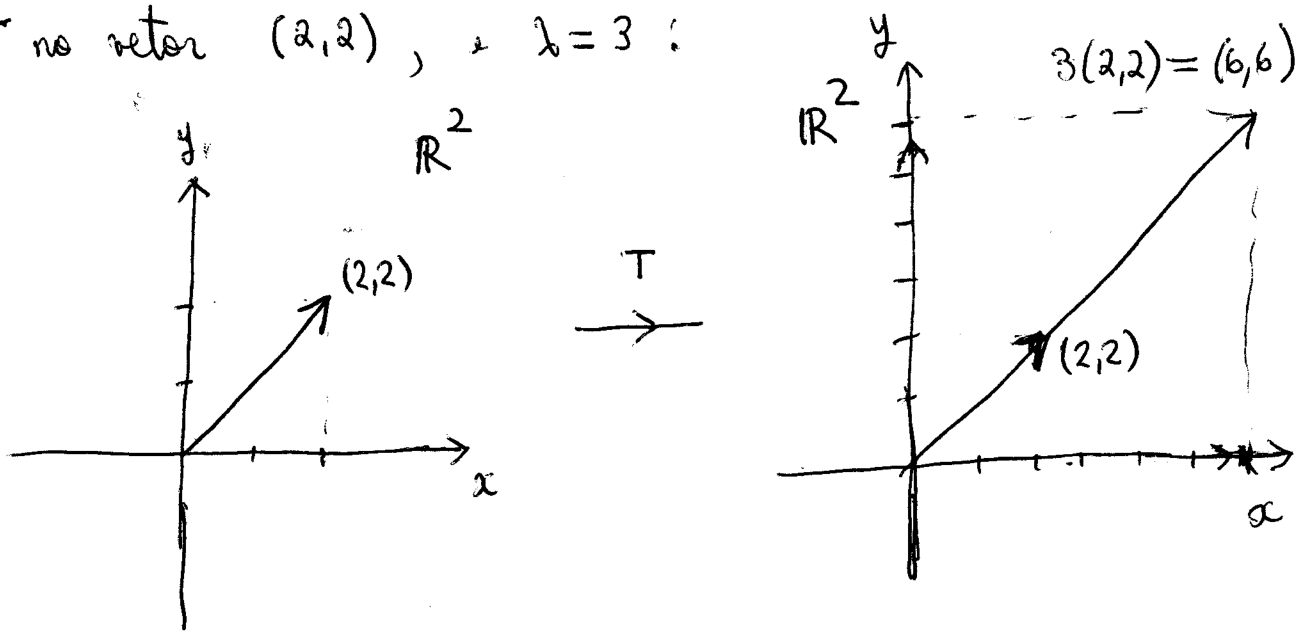
A partir de agora, vamos estudar transformações entre os espaços vetoriais, que preservam a estrutura de soma e multiplicação por escalar.

motivação em $\mathbb{R}^2$:

(1) $\lambda \in \mathbb{R}$, com $|\lambda| > 1$, defina

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto T(x,y) := \lambda(x,y)$$

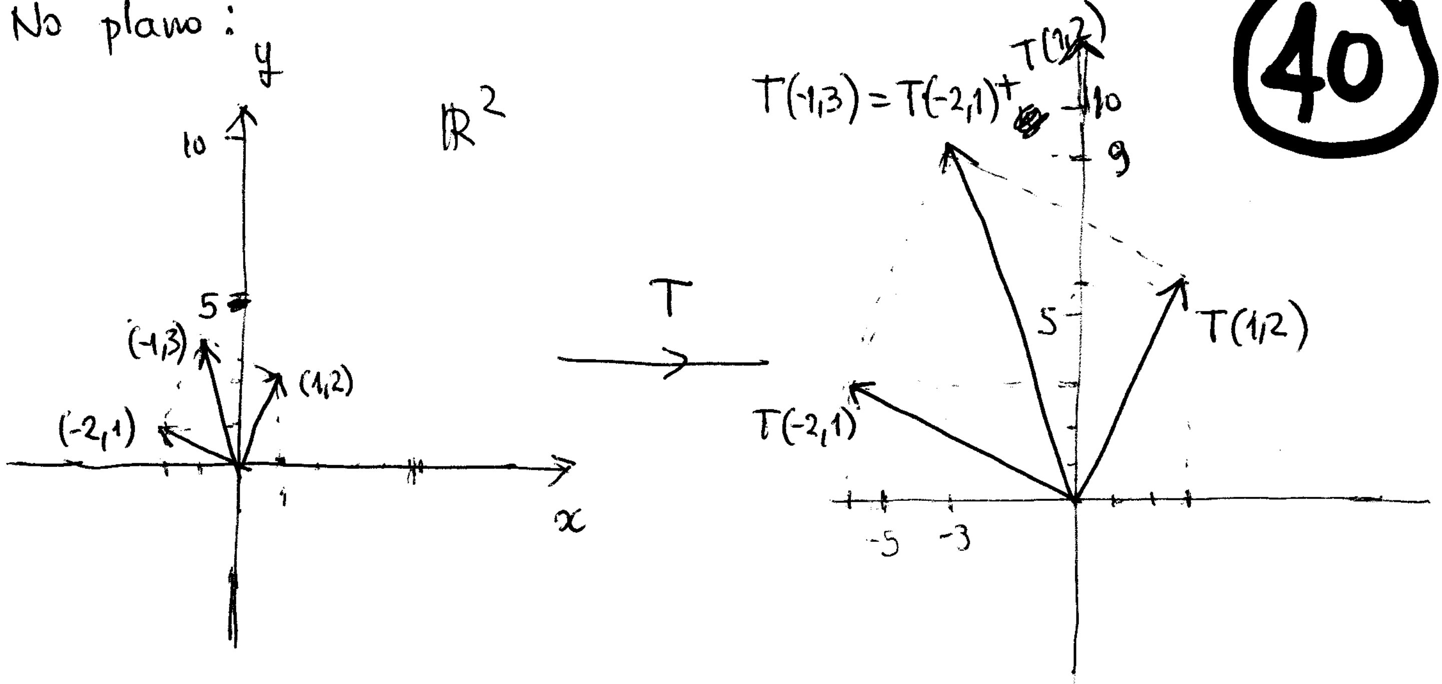
T é chamada de dilatação. Vejamos ~~a~~ a ação da T no vetor $(2,2)$, e $\lambda = 3$:



Agora, sejam os vetores $(1,2)$; $(-2,1) \in \mathbb{R}^2$, então $(1,2) + (-2,1) = (-1,3)$. Avaliando T em cada um dos vetores dessa equação temos:

$$T(1,2) = 3(1,2) = (3,6)$$
$$T(-2,1) = 3(-2,1) = (-6,3)$$
$$T(-1,3) = 3(-1,3) = (-3,9) = (3,6) + (-6,3) = T(1,2) + T(-2,1)$$

No plano:



Note que essa transformação preserva as operações de soma e multiplicação por escalar.

Quando $|\lambda| < 1$, T é chamada de contração

Definição 15: Sejam V e W espaços vetoriais reais e uma aplicação $T: V \longrightarrow W$. Dizemos que T é uma transformação linear se possui as seguintes propriedades:

a) $T(u+v) = T(u) + T(v)$, $\forall\, u, v \in V$

b) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, u \in V$

Exemplos:

① V um e.v. real

$$I_V : V \longrightarrow V \qquad \text{é transf. linear.}$$
$$v \longmapsto I_V(v) = v$$